

# 基于形态特征的快速分形图像编码

何传江 杨 静

(重庆大学数理学院, 重庆 400044)

**摘要** 现有的快速分形编码算法多数是在降低图像质量的前提下实现的。针对这个问题, 提出了一个快速分形编码算法, 它基于新定义的图像块的形态特征的概念。这种算法先把码本按形态特征大小赋序, 然后对于每个输入 Range 块, 在赋序码本中寻找与它的形态特征最接近的码块, 进而在这个码块的邻域内搜索 Range 块的最佳匹配块。实验结果显示, 对于  $256 \times 256$  的 Lena 图像, 与基本分形算法比较, 其依赖于搜索邻域大小, 该算法既能在峰值信噪比 (PSNR) 相同的情况下编码速度加快 4.4 倍, 也能在主观质量略有下降的情况下编码速度加快约 140 倍。

**关键词** 分形 分形图像编码 图像压缩 形态特征

**中图分类号**: TN919.81 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)04-0410-05

## Fast Fractal Image Encoding Based on Shape Feature

HE Chuan-jiang, YANG Jing

(College of Mathematics and Science, Chongqing University, Chongqing 400044)

**Abstract** Most of the existing acceleration schemes for fractal image coding can reduce the required computation only at the expense of more or less degradation of the reconstructed image quality. Thus, a new accelerating scheme is proposed in this paper, which is based on a newly-defined concept of shape feature of an image block. By sorting the blocks in the codebook according to their shape features, the encoder uses the bisection search method to find out the nearest codebook block to an input range block in the sense of shape features. After that, the encoder further visits the codebook blocks in the vicinity of the nearest codebook block in order to search out the best-matched codebook block to the range block being encoded. A simulation on popular  $256 \times 256$  Lena image shows that, depending on the search neighborhood size, the proposed algorithm not only can achieve the speed-up of 4.4 times with the same PSNR (peak signal-to-noise ratio) as the baseline fractal algorithm with full search, but also can obtain the speed-up of about 140 times at the cost of acceptable degradation of the decoded image quality.

**Keywords** fractal, fractal image coding, image compression, shape feature

## 1 引言

自然图像通常是自然界某片断的真实再现, 按照分形理论的观点, 应该具有一定的分形特征, 如不同尺度下的局部自相似性。分形图像编码就是利用局部自相似性以消除图像数据中存在的跨尺度冗余的新颖压缩技术。10 余年来, 分形编码以思想新颖、压缩比高、分辨率无关性、解码快等优点受到广

泛关注<sup>[1]</sup>。

分形编码以其新颖的编/解码思想独树一帜。与追求变换结果(解除图像数据的相关性)的变换编码不同, 分形编码的目标不是变换的结果, 而是变换本身。在分形编码中, 图像由一个压缩变换——作用于图像局部区域、揭示图像局部自相似性的一组仿射映射构成的函数系统来编码, 然后由压缩变换迭代作用于任意初始图像来重构(解码)。因为表示变换的数据量大大小于原始图像的数据量, 因

收稿日期: 2004-05-14; 改回日期: 2004-11-15

**第一作者简介**: 何传江(1964 ~ ), 男, 副教授。1985 年、1988 年先后获得四川大学数学系理学学士、硕士学位, 2004 年获得重庆大学自动化学院工学博士学位, 现为重庆大学数理学院副院长。主要从事分形图像编码等研究。E-mail: chuanjianghe@sina.com

此,分形编码能够实现很高的压缩比。

虽然分形图像编码有在压缩比下实现好的图像质量的优点,但它需要较长的编码时间。构造分形码的主要时间是在很大的码本中寻找每个 Range 块的最佳匹配块,尽管全搜索法能够得到最优结果,但这个过程的计算成本很高,从而限制了全搜索法的广泛应用。目前,人们已提出了许多快速分形编码算法<sup>[1]</sup>,且新方案仍在不断出现<sup>[2-4]</sup>。因为分形编码本身是有损编码方法,所以,牺牲一定的图像质量以换取编码时间减少的做法成为快速分形编码研究的主流。尽管也有一些相对于基本算法而言保持图像质量不变的加快算法,但缺点是加快倍数不高(通常2倍左右<sup>[5,6]</sup>)。

基于文献[4]的编码思想,提出一种快速分形编码算法。该算法依据新定义的形态特征的概念和一个相应不等式,把分形编码的子块匹配问题转化为形态特征意义下的最近邻搜索问题,从而大大加快了编码速度。实验结果表明,与基于全搜索的基本分形算法比较,其依赖于搜索邻域大小,该算法既能在峰值信噪比(PSNR)相同的情况下实现编码速度加快4倍以上,也能在主观质量略有下降的情况下实现编码速度加快100倍以上,这大大优于文献[4]的结果。

## 2 基本分形算法

在分形编码中,图像被分割成大小两类子块,分别称为 Range 块和 Domain 块。Range 块互不重叠且覆盖整幅图像,Domain 块可以重叠且边长为 Range 块的2倍。Domain 块经 $2 \times 2$ 像素块亮度平均收缩为 Range 块的大小,这种收缩子块的全体就构成虚拟码本(记为 $\Omega$ )。然后每个 Range 块 $R$ 由其最佳匹配块 $D_m \in \Omega$ 的亮度变换来近似,即 $R \approx sD_m + oI$ ,其中, $I$ 是亮度值均为1的常值块, $s, o$ 起调整 $D_m$ 的对比度和亮度的作用。此外,为了改进图像质量,一般还要对码本子块进行8个等距变换(旋转与反射)。

编码阶段,对于每个 Range 块 $R$ ,为了寻求其最佳匹配块 $D_m \in \Omega$ ,需要求解极小化问题:

$$\|R - (sD_m + oI)\| = \min_{D \in \Omega} \min_{s, o \in \mathbb{R}, |s| < 1} \|R - (sD + oI)\| \quad (1)$$

其中, $\mathbb{R}$ 是实数集, $\|\cdot\|$ 是向量2-范数, $m, s$ 和 $o$ 分别表示 $R$ 的最佳匹配块的序号和对该匹配块对比度和亮度的最优调整因子。此外,对比度因子要求满足约束 $|s| < 1$ 是为了理论上保证解码迭代序列

收敛。三元组 $(m, \hat{s}, \hat{o})$ 称为 $R$ 的分形码,其中, $\hat{s}, \hat{o}$ 是 $s$ 和 $o$ 的(均匀)量化值。此外,如果考虑8个等距变换,则分形码中还应包括等距变换序号。全体 $R$ 的分形码组成原始图像的分形码,它不是描述图像数据本身,而是描述一个使图像近似不变的压缩变换。

在基本算法中,分形编码阶段的一个重要步骤是,对于每个 Range 块,必须求解式(1)给出的极小化问题。这是一个复杂的极小化问题,一般寻求次优解。通常有两种方法:一种方法<sup>[7]</sup>是预设

$$s \in \{s_0, s_1, \dots, s_{q-1}\}, s_i \in [0, 1], 0 \leq i \leq q-1$$

其中, $q$ 是 $s$ 的量化级数(如4、8等等)。于是,式(1)的内层极小化问题变成单变量 $o$ 的最小值问题。经简单计算得 $o = \bar{r} - s\bar{d}$ ,并量化之( $\bar{r}, \bar{d}$ 分别表示 $R, D$ 的亮度均值),接着求解式(1)的外层极小化问题(全搜索)。文献[4]采用了这种方法。另一种改进方法是忽略对 $s$ 的约束 $|s| < 1$ ,采用最小二乘法求解式(1)的内层极小化问题,得到参数 $s, o$ 的值,并量化之(量化前可能需要进行截断处理以满足约束 $|s| < 1$ ),然后求解式(1)的外层极小化问题。本文采用的是这种方法。

解码是相对简单的迭代过程,由 Banach 不动点定理给出的迭代算法完成,即分形码描述的压缩变换迭代作用于任何初始图像来生成。顺便指出,分形解码中每次迭代图像所需要的码本是由上一次迭代图像提供的,而第一次迭代图像所需要的码本则由初始图像提供。这是分形编码不同于矢量量化编码的地方。此外,迭代解码也是分形编码的新颖之处。

## 3 快速算法

### 3.1 算法理论分析

给定子块 $X = [x_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (视为向量),定义

$$\hat{X} = \frac{X - \bar{x} \cdot \mathbf{I}}{\|X - \bar{x} \cdot \mathbf{I}\|} \quad (2)$$

其中, $\bar{x}$ 是子块 $X$ 的亮度均值。也就是说, $\hat{X}$ 是 $X$ 的去均值、归一化能量版本。在VQ中, $\hat{X}$ 称为子块 $X$ 的形态向量(shape vector)<sup>[8]</sup>。

显然, $\langle \hat{X}, \mathbf{I} \rangle = 0$ 且 $\langle \hat{X}, \hat{X} \rangle = \|\hat{X}\|^2 = 1$ 。这里, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量的欧氏内积。

定义

$$S(X) = \sum_{i,j=1}^n \frac{|x_{i,j} - \bar{x}|}{\|X - \bar{x}\mathbf{I}\|} \quad (3)$$

因为  $S(X)$  是子块  $X$  的一种特征,它是通过子块  $X$  的形态向量定义的,因此,本文把它称为子块  $X$  的形态特征。

因为

$$\begin{aligned} \|R - sD - oI\|^2 &= \langle R - sD - oI, R - sD - oI \rangle \\ &\text{是变量 } s, o \text{ 的二元二阶多项式, 所以, 对于 } R, D \in \mathbf{R}^{n \times n}, \text{ 直接计算即知} \\ \min_{s, o \in \mathbf{R}} \|R - sD - oI\|^2 \\ &= \|R - \bar{r}I\|^2 - \frac{|\langle R - \bar{r}I, D - \bar{d}I \rangle|^2}{\|D - \bar{d}I\|^2} \end{aligned} \quad (4)$$

定理 设  $R, D \in \mathbf{R}^{n \times n}$  (视为向量), 记

$$E(R, D) = \min_{s, o \in \mathbf{R}} \|R - sD - oI\|$$

则有不等式

$$E(R, D) \geq \frac{\sigma_R}{2n} |S(R) - S(D)|^2 \quad (5)$$

其中,  $\sigma_R = \|R - \bar{r}I\|/n$ , 即  $R$  的标准差。

证明 根据式(4), 得到

$$\begin{aligned} E(R, D)^2 &= \|R - \bar{r}I\|^2 \left( 1 - \frac{|\langle R - \bar{r}I, D - \bar{d}I \rangle|^2}{\|R - \bar{r}I\|^2 \|D - \bar{d}I\|^2} \right) \\ &= (n\sigma_R)^2 (1 - |\langle \hat{R}, \hat{D} \rangle|^2) \\ &= (n\sigma_R)^2 (1 + |\langle \hat{R}, \hat{D} \rangle|) (1 - |\langle \hat{R}, \hat{D} \rangle|) \\ &= (n\sigma_R)^2 \|\hat{R} + \hat{D}\|^2 \|\hat{R} - \hat{D}\|^2 / 4 \end{aligned} \quad (6)$$

上式最后一步用到下面的等式

$$\|\hat{R} \pm \hat{D}\|^2 = \langle \hat{R} \pm \hat{D}, \hat{R} \pm \hat{D} \rangle = 2 \pm 2\langle \hat{R}, \hat{D} \rangle$$

根据 Cauchy 不等式和三角不等式, 有

$$\begin{aligned} \|\hat{R} \pm \hat{D}\|^2 n^2 &= \left( \sum_{i,j} |\hat{r}_{i,j} \pm \hat{d}_{i,j}|^2 \right) n^2 \\ &= \left( \sum_{i,j} |\hat{r}_{i,j} \pm \hat{d}_{i,j}|^2 \right) \left( \sum_{i,j} 1^2 \right) \\ &\geq \left( \sum_{i,j} |\hat{r}_{i,j} \pm \hat{d}_{i,j}| \cdot 1 \right)^2 \\ &\geq \left( \sum_{i,j} ||\hat{r}_{i,j}| - |\hat{d}_{i,j}|| \right)^2 \\ &\geq \left( \sum_{i,j} (|\hat{r}_{i,j}| - |\hat{d}_{i,j}|) \right)^2 \\ &= |S(R) - S(D)|^2 \end{aligned}$$

由此并结合式(6), 得到式(5)

证毕

算法理论分析。根据式(5), 对于标准差  $\sigma_R \geq \tau$  的  $R$  ( $\tau > 0$  是适当阈值), 有

$$E(R, D) \geq \frac{\tau}{2n} |S(R) - S(D)|^2 \quad (7)$$

式(7)表明: 如果  $R, D$  的形态特征相差太大, 则  $E(R, D)$  也大, 从而  $D$  不可能匹配  $R$ ; 等价地, 如果  $E(R, D)$  足够小 ( $D$  匹配  $R$ ), 则  $R, D$  的形态特征也

相差足够小。因此, 对于标准差不小于阈值的  $R$ , 其最佳匹配块  $D$  一定是  $R$  在形态特征意义下的近邻。于是, 对于标准差不小于阈值的  $R$ , 把在码本中搜索其最佳匹配块  $D$  的问题进行如下的转化: 先把码本按形态特征大小赋予序结构, 找出与  $R$  的形态特征最接近的码本块  $D$ , 然后在赋序码本中使用二分法对  $D$  的  $k$  邻域进行搜索。其中,  $k$  的大小需要实验求取。

但是, 上述做法对不满足  $\sigma_R \geq \tau$  的  $R$  并不适用, 因为式(7)不再成立。而根据式(6), 对于任意  $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $E(R, D) \leq n\sigma_R$ 。这说明, 对于标准差足够小的  $R$ , 任意  $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$  都可以作为其匹配块。但是, 标准差足够小的  $R$  的亮度变化很小, 通常对应于图像的平滑部分, 可近似看成常值块, 用其均值版本  $\bar{r}I$  近似最合适。于是, 对于标准差足够小的  $R$ , 直接用其均值版本  $\bar{r}I$  近似之, 无需再搜索其匹配块, 从而避免了上述问题。

最后, 因为子块的 8 种等距变换 (4 个  $90^\circ$  倍数旋转和水平方向、垂直方向、主次对角线方向对称反射) 不改变其形态特征, 所以, 在赋序码本中  $D$  与其等距变换版本是近邻。于是, 编码器在最后进行 8 个等距变换, 以进一步改进图像质量。

### 3.2 算法描述

基于上述分析, 具体算法步骤如下:

(1) 设定平滑性阈值  $\tau$ 。

(2) 分割图像为  $n \times n$  固定块, 记为  $R$ 。以纵横方向步长均为  $t$  生成尺寸为  $2n \times 2n$  的 Domain 块池, 即相邻 Domain 块间在水平方向或垂直方向有  $t$  个像素的重叠。对于每个 Domain 块, 采用  $2 \times 2$  像素块亮度平均得到  $n \times n$  块, 这样的收缩子块的集合就构成虚拟码本  $\Omega$ 。

(3) 计算每个子块  $R$  和  $D \in \Omega$  的形态特征以及标准差。按形态特征给码本  $\Omega$  赋予线性序结构 (升序或降序)。

(4) 对于每个  $R_i$ , 搜索它在形态特征意义下的最近邻  $D_{m(i)} \in \Omega$ :

① 如果  $\sigma_{R_i} < \tau$ , 则直接用均值块  $\bar{r}_i I$  近似之;

② 如果  $\sigma_{R_i} \geq \tau$ , 则按二分法在赋序码本  $\Omega$  中搜索最近邻  $D_{m(i)}$ 。

(5) 在赋序码本  $\Omega$  中定义以码块  $D_{m(i)}$  为中心的  $k$ -邻域, 从中选择与  $R$  有最小  $E(R, D)$  的码本块  $D_m$ 。考虑  $D_m$  的 8 个等距变换, 并选出有最小  $E(R, D)$  的等距变换序号  $l$ 。序号  $m, l$ 、参数  $s$  和  $o$  就组成

$R$  的分形码  $(m, l, \hat{s}, \hat{o})$ 。

(6) 对于每个 Range 块  $R$ , 重复以上步骤直至所有 Range 块。

因为  $s$  未必满足约束  $|s| < 1$ , 因此需要进行截断处理。实验结果表明, 综合考虑压缩比与图像质量, 参数  $s, o$  分别按 5bit 和 7bit 量化可得到最佳效果。因此, 本文的截断方案(非最优)如下: 若  $s > 1$ , 取  $s = 31/32$ ; 若  $s < 0$ , 取  $s = 0$ ; 若  $o > 127$ , 则取  $o = 127$ ; 若  $o < 0$ , 则取  $o = 0$ 。

## 4 实验结果

选择大量标准测试图像进行实验, 这里仅列举出对  $256 \times 256$  Lena 图像(8bit 量化)的实验结果。实验平台为 IBM ThinkPad (700 MHz CPU/ 128MB 内存), 程序用 C++ 编写。测试性能参数是编码时间(秒, 源于系统时钟)和峰值信噪比(PSNR(dB))。在实验中, 选取 Range 块大小为  $4 \times 4$ , 生成 Domain 块池的滑窗步长  $t$  为 8。

该文算法依赖于控制参数  $\tau$ 。不难想见, 控制参数  $\tau$  阈值越大, 则被当作常值块的  $R$  越多, 自然会加快编码速度, 但势必降低重构图像质量。实验结果表明: 当  $\tau \geq 5$  时, 图像平滑部分出现“块效应”(tiling effect);  $\tau$  值越大, “块效应”越明显; 但  $\tau \leq 4$  时“块效应”基本消失(图 1)。因此, 选取  $\tau = 4$  作为缺省值。

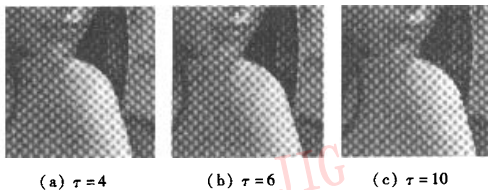


图 1 本文算法的块效应(邻域大小  $k = 100$ )

Fig. 1 Tiling effect of the proposed algorithm ( $k = 100$ )

表 1 给出了该文算法与基本算法(参数截断、量化方案相同)的对比实验结果。从表 1 可以看出, 当参数  $\tau = 4$  和邻域大小  $k = 230$  时, 本算法的峰值信噪比与对应的基本分形算法相同。这验证了前面的理论分析: 对于标准差不小于阈值的 Range 块, 其最佳匹配块是它在形态特征意义下的近邻。

本算法在峰值信噪比相同的情况下实现编码速度加快 4.4 倍, 该结果大大优于文献[4]的结果, 也好于文献[5]、[6]的结果(对于  $256 \times 256$  Lena 图

表 1 本文算法的编码结果( $\tau = 4$ )

	本文算法(邻域大小 $k$ )						基本算法
	5	50	100	150	200	230	
PSNR (dB)	26.09	27.94	28.4	28.49	28.63	28.67	28.67
编码时间 (s)	0.69	5.4	10.35	14.94	19.21	21.7	95.8

注: 测试图像为  $256 \times 256$  Lena 图像

像, 按  $4 \times 4$  Range 块分割, 在峰值信噪比相同的情况下, 文献[5] 实现编码速度加快 2.32 倍; 文献[6] 实现编码速度加快 0.56 倍)。此外, 本算法的编码时间由邻域大小  $k$  控制, 是可调的, 因此, 本文算法比文献[4]~[6]算法灵活。如果仅仅从主观质量看, 本算法可通过选取较小的阈值  $k$  获得较高的编码速度。例如, 图 2 给出了基本算法与本算法( $\tau = 4, k = 5$ )的解码图像对比: 本算法编码速度加快约 140 倍(不到 1s), 尽管峰值信噪比下降约 2.5dB, 但是图像主观质量在某些场合仍然可以接受。因此, 在实时性要求高、质量次之的应用场合, 本算法有较好的应用前景。



(a) 基本算法

(b) 本文算法  
( $\tau = 4, k = 5$ )

图 2 解码图像

Fig. 2 Decoded images

## 5 结论

本文提出了图像块的形态特征的概念, 并证明一个联系最小二乘误差与形态特征的不等式。基于这些理论结果和文献[4]算法的思想, 提出了一种快速编码算法, 它把耗时的 Range 块与码本子块的匹配问题转化为形态特征意义下的最近邻问题。实验结果显示: 与基于全搜索的基本算法比较, 对于标准测试图像 Lena ( $256 \times 256, 8b$ ), 其依赖于搜索邻域大小, 该算法既能在峰值信噪比相同的情况下实

现编码速度加快 4 倍以上,也能在主观质量略有下降的情况下实现编码速度加快 100 倍以上。在实时性要求高、质量次之的场合,本文算法有较好的应用前景。

为了独立显示本方案的效果,没有采用已提出的大量分形编码策略。当然,在本算法的基础上,融入这些编码策略将能获得更好的图像质量和更快的编码速度。

在分形编码中,图像分割是提高图像质量与压缩比极为重要的问题,目前已有多种分割方法(详见文献[1]及其参考文献)。但是,在快速分形编码文献中,一般采用两种基本而重要的分割方法:一致分割(uniform partitioning)或四叉树分割(quadtree partitioning)。为了编程方便,本文选择了一致分割法,但本加快方案对四叉树等自适应分割方法也是适用的。此外,对于基于一致分割的分形算法,压缩比仅仅依赖于图像尺寸、Range 块大小、生成 Domain 块池的纵横方向步长以及参数  $s, o$  的量化比特数等,与图像内容无关,这与基于四叉树分割的分形算法不同。因此,本文没有列出压缩比数据。顺便指出,本算法与基本算法具有相同压缩比(压缩比的计算在分形编码奠基性文献[7]中已有详细论述)。

#### 参考文献 (References)

- 1 Wohlberg B, Jager C. A review of the fractal image coding literature

- [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, 8(12): 1716 ~ 1729.
- 2 Lai C M, Lam K M, Siu W C. A fast fractal image coding based on kick-out and zero contrast conditions [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(11): 1398 ~ 1403.
- 3 He C, Yang S X, Huang X. Variance-based accelerating scheme for fractal image encoding[J]. IEE Electronics Letters, 2004, 40(2): 115 ~ 116.
- 4 He C J, Jiang H J, Huang X Y. Fast fractal image encoding based on mean deviation-ordered[J]. Journal of Image and Graphics, 2004, 9(9): 1130 ~ 1134. [何传江, 蒋海军, 黄席樾. 基于平均偏差排序的快速分形图像编码[J]. 中国图象图形学报, 2004, 9(9): 1130 ~ 1134.]
- 5 Jeng J H, Truong T K, Sheu J R. Fast fractal image compression using the Hadamard transform [J]. IEEE Proceedings—Vision, Image & Signal Processing, 2000, 147(6): 571 ~ 573.
- 6 Hartenstein H, Saupe D. Lossless acceleration of fractal image encoding via the fast Fourier transform[J]. Signal Processing: Image Communication, 2000, 16(4): 383 ~ 394.
- 7 Jacquin A E. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(1): 18 ~ 30.
- 8 Oehler K L, Gray R M. Mean-gain-shape vector quantization [A]. In: Proceedings IEEE International Conference Acoustics, Speech, and Signal Processing [C], Minneapolis, MN, USA, 1993: 241 ~ 244.